ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS DE MARSEILLE

Mai 1974

CONCOURS D'ADMISSION

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les parties II *et* III *sont indépendantes entre elles*

I

On considère l'équation (E_n) où F est une fonction numérique inconnue, et où $n \in \mathbf{N}$:

$$(E_n) \qquad F(x+1) - F(x) = nx^{n-1} \qquad n \geqslant 1$$

1° Démontrer que les polynômes réels solutions de (E_n) sont de degré n et que deux polynômes solutions ont pour différence une constante.

2° Démontrer que si le polynôme P_n est solution de (E_n), alors $\frac{1}{n} P'_n$ est solution de (E_{n-1}). (P'_n est le polynôme dérivé de P_n).

3° On pose pour tout $n \geqslant 1$: $B_{n-1} = \frac{1}{n} P'_n$.

On définit ainsi une suite unique de polynômes telle que :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \quad \text{et} \quad B_{n-1} = \frac{1}{n} B'_n$$

Calculer les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4. On convient de poser $B_0 = 1$.

4° Calculer $\int_0^1 B_n(x)\,dx$.

5° *a.* Prouver :

$$\forall\, k \geqslant 1 \qquad B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}\, B_{n-k}$$

($B_n^{(k)}$ est le polynôme dérivé d'ordre k de B_n).

b. On pose pour tout k entier : $\beta_k = B_k(0)$.

Donner l'expression du polynôme B_n à l'aide des β_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

c. Prouver :

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k}\, \beta_k = 0\,.$$

6° Prouver : $\forall\, x \in \mathbf{R} \qquad B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$

(on pourra utiliser le polynôme $A_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$).

En déduire le calcul des β_{2p+1} et des $B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

II

1° Démontrer, par récurrence sur n, que :

$B_{2n+1}(x)$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ lorsque $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et du signe de $(-1)^n$ lorsque $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et que $B_{2n}(x) - B_{2n}(0)$ est du signe de $(-1)^n$ lorsque $x \in]0, 1[$.

2° Soit f une fonction telle que $f^{(2n+1)}$ est continue sur $[0, 1]$. En remarquant que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\, B'_1(t)\,dt\,,$$

démontrer pour tout entier p, $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right] - \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right] - \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)\, B_{2p+1}(t)\,dt\,.$$

3° Si $f^{(2n+2)}$ est *continue* sur $[0, 1]$, démontrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ **tel que :**

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right] - \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right] - \frac{\beta_{2n+2}}{(2n+2)!}\, f^{(2n+2)}(c)\,. \qquad \text{III}$$

1° En calculant le produit de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} z^n$ et de la série entière de somme $e^z - 1$ où z est complexe, prouver que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} z^n$ a pour somme $\frac{z}{e^z - 1}$ et préciser son rayon de convergence.

2° *a.* Construire le graphique de la fonction numérique f telle que

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}\,.$$

b. Calculer très simplement une valeur approchée à moins de 5.10^{-4} de :

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{e^x - 1}\,.$$

On donnera toutes les justifications nécessaires.

c. Soit les deux intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x - 1} \qquad \text{et} \qquad J = \int_{-\infty}^{0} \left[f(x) + x\right] dx\,.$$

Prouver qu'elles sont convergentes et égales. Interpréter géométriquement ce résultat.

3° *a.* Calculer en fonction de $x \in \mathbf{R}$, la somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$ et préciser le rayon de convergence.

b. Retrouver la propriété déjà démontrée au I. 6° :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \qquad B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)\,.$$

4° A l'aide des β_n, donner le développement en série entière de $\frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$ $(z \in \mathbf{C})$, en précisant le rayon de convergence. En déduire le développement en série entière de $\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}$, puis celui de $\frac{t}{2}\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$ **où $t \in \mathbf{R}$.**

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail